Recent Progress in Dynamics
MSRI Publications
Volume **54**, 2007

Le lemme d'Ornstein–Weiss d'après Gromov

FABRICE KRIEGER

Dédié à Anatole Katok pour son 60ème anniversaire

RÉSUMÉ. Dans cette note on démontre un théorème de convergence pour les fonctions sous-additives invariantes définies sur les parties finies d'un groupe dénombrable moyennable. Ce théorème peut être déduit d'un résultat général dû à D. S. Ornstein et B. Weiss. La démonstration que l'on présente ici suit une preuve esquissée par M. Gromov.

1. Introduction

Soit G un groupe dénombrable. On note $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G.

DÉFINITION 1.1. On dit que G est *moyennable* s'il existe une fonction

$$\mu : \mathcal{P}(G) \to [0, 1]$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\mu(G) = 1$,

(ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ quelles que soient $A, B \in \mathcal{P}(G)$ telles que $A \cap B = \varnothing$,

(iii) $\mu(gA) = \mu(A)$ quels que soient $g \in G$ et $A \in \mathcal{P}(G)$.

Mathematics Subject Classification: 43A07, 20F65, 20F19, 28C10.

Mots clés: Groupe moyennable, fonction sous-additive, lemme d'Ornstein–Weiss, entropie, dimension topologique moyenne.

Notons $\mathcal{F}(G)$ l'ensemble des parties finies non vides de G. D'après un théorème de Følner [Føl], le groupe G est moyennable si et seulement si il existe une suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}(G)$ telle que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|(gF_i) \triangle F_i|}{|F_i|} = 0 \text{ quel que soit } g \in G,$$

où $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ désigne la différence symétrique entre les ensembles A et B, et $|A|$ est le cardinal de A. Une telle suite est appelée une *suite de Følner* de G. Voici quelques résultats concernant la classe des groupes moyennables (voir par exemple [Gre]) :

(i) tout sous-groupe d'un groupe moyennable est moyennable ;

(ii) tout quotient d'un groupe moyennable est moyennable ;

(iii) toute extension d'un groupe moyennable par un groupe moyennable est moyennable ;

(iv) si $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i$ avec $G_0 \subset G_1 \subset \dots$ une suite croissante de sous-groupes moyennables de G, alors G est moyennable ;

(v) les groupes finis et $\mathbb{Z}$ sont moyennables.

Le but de cette note est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1 (ORNSTEIN–WEISS). *Soit G un groupe dénombrable moyennable et $h : \mathcal{F}(G) \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :*

(a) *h est sous-additive, c'est-à-dire*

$$h(A \cup B) \le h(A) + h(B) \text{ quelles que soient } A, B \in \mathcal{F}(G) ;$$

(b) *h est invariante à droite, c'est-à-dire*

$$h(Ag) = h(A) \text{ quels que soient } g \in G \text{ et } A \in \mathcal{F}(G).$$

Alors il existe un réel $\lambda = \lambda(G, h) \ge 0$ tel que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{h(F_i)}{|F_i|} = \lambda$$

pour toute suite de Følner $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de G.

Une démonstration de ce résultat (énoncé avec des hypothèses plus fortes sur la fonction h) à partir d'un théorème dû à Ornstein et Weiss sur les quasi-pavages [OrW, Section I.2, Th. 6] se trouve dans [LiW, Th. 6.1]. Dans [Gro, Section 1.3], Gromov esquisse une preuve directe du théorème 1.1 en laissant au lecteur la vérification de certains passages. Il utilise des notions introduites par Ornstein et Weiss dans [OrW]. La démonstration qui est présentée ici suit l'approche de Gromov.

Le théorème 1.1 est à la base de la construction d'invariants d'actions de groupes moyennables comme l'entropie métrique, l'entropie topologique et la dimension topologique moyenne (voir [Gro], [LiW], [OrW], [CoK]). On trouve dans [Mou] un théorème de convergence de ce type pour des fonctions invariantes vérifiant une condition plus forte que la sous-additivité. Le résultat énoncé dans [Mou] est suffisant pour définir l'entropie métrique d'actions de groupes moyennables.

Plan de l'article. Dans la section 2, on introduit la notion de K-frontière qui permet de donner une autre caractérisation des suites de Følner. La section 3 est consacrée à la démonstration d'un lemme de remplissage (lemme 3.5), résultat qui est à la base de la démonstration du théorème 1.1. Grâce à ce lemme, on construit dans la section 4 un procédé de recouvrement partiel des parties finies $D \subset G$. Les propriétés de ce recouvrement permettent d'obtenir une bonne majoration du rapport $h(D)/|D|$.

Remerciement. Je tiens à remercier Michel Coornaert qui m'a encouragé à écrire cet article.

2. Moyennabilité relative

On définit dans cette section les notions de K-intérieur, K-extérieur et K-frontière d'une partie d'un groupe (voir [OrW]).

Soient K et A des parties d'un groupe G. On appelle *K-intérieur* (resp. *K-extérieur*) de A la partie de G notée $\mathrm{Int}_K(A)$ (resp. $\mathrm{Ext}_K(A)$) formée des éléments $g \in G$ tels que Kg soit contenu dans A (resp. dans $G \setminus A$). On définit la *K-frontière* de A par :

$$\partial_K(A) = G \setminus \big(\mathrm{Int}_K(A) \cup \mathrm{Ext}_K(A)\big).$$

La K-frontière de A est donc l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que Kg rencontre à la fois A et $G \setminus A$. La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition de la K-frontière :

PROPOSITION 2.1. *Soient K, A, B des parties d'un groupe G et $g \in G$. Alors on a*

(i) $\partial_K(A) = \partial_K(G \setminus A)$ *;*

(ii) $\partial_K(A \cup B) \subset \partial_K(A) \cup \partial_K(B)$ *;*

(iii) $\partial_K(A \setminus B) \subset \partial_K(A) \cup \partial_K(B)$ *;*

(iv) $\partial_K(A) \subset \partial_{K'}(A)$ *si* $K \subset K' \subset G$ *;*

(v) $\partial_{Kg}(A) = g^{-1}\partial_K(A)$ *;*

(vi) $\partial_K(Ag) = \partial_K(A)g$. □

Soient K et A des parties finies d'un groupe G. Alors $\partial_K(A)$ est finie. Supposons $A \neq \varnothing$. On appelle *constante de moyennabilité relative de A par rapport à K* le rationnel $\alpha(A, K)$ défini par :

$$\alpha(A, K) = \frac{|\partial_K(A)|}{|A|}.$$

Remarquons que les égalités (v) et (vi) de la proposition 2.1 impliquent

$$\alpha(A, Kg) = \alpha(Ag, K) = \alpha(A, K) \text{ quel que soit } g \in G. \tag{2–1}$$

LEMME 2.2. *Soient K et A des parties d'un groupe G. Supposons $K = K^{-1}$ et $1_G \in K$. Alors on a les inclusions suivantes :*

(i) $(kA) \triangle A \subset \partial_K(A)$ *quel que soit $k \in K$;*

(ii) $\partial_K(A) \subset K((KA) \triangle A)$.

DÉMONSTRATION. Montrons l'inclusion (i). Soit $g \in (kA) \triangle A$ avec $k \in K$. Alors soit $k^{-1}g \in A$ et $g \in G \setminus A$, soit $g \in A$ et $k^{-1}g \in G \setminus A$. Or k^{-1} et 1_G appartiennent à K. Dans les deux cas, on a donc $Kg \cap A \neq \varnothing$ et $Kg \cap (G \setminus A) \neq \varnothing$. On en déduit $g \in \partial_K(A)$.

Montrons l'inclusion (ii). Soit $g \in \partial_K(A)$. Alors on a $g \in K^{-1}A = KA$ et $Kg \cap (G \setminus A) \neq \varnothing$. Supposons tout d'abord $g \notin A$. Alors $g \in KA \setminus A = (KA) \triangle A \subset K\big((KA) \triangle A\big)$ puisque $1_G \in K$. Supposons maintenant $g \in A$. Comme $Kg \cap (G \setminus A) \neq \varnothing$, il existe $k \in K$ tel que $kg \in KA \setminus A = (KA) \triangle A$. On en déduit $g \in K((KA) \triangle A)$. □

PROPOSITION 2.3. *Soit $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de parties finies non vides d'un groupe dénombrable G. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *La suite (F_i) est une suite de Følner de G ;*

(b) *Pour toute partie finie $K \subset G$, on a*

$$\lim_{i \to \infty} \alpha(F_i, K) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Montrons l'implication (a) $\Rightarrow$ (b). Supposons que (F_i) est une suite de Følner de G. Soit K une partie finie de G et définissons $L \subset G$ par

$$L = K \cup K^{-1} \cup \{1_G\}.$$

Alors L est une partie finie de G contenant 1_G et vérifiant $L = L^{-1}$. Soit $i \in \mathbb{N}$. La proposition 2.1.(iv) et le lemme 2.2.(ii) impliquent

$$\partial_K(F_i) \subset \partial_L(F_i) \subset L((LF_i) \triangle F_i).$$

Puisque l'on a

$$(LF_i) \triangle F_i \subset \bigcup_{l \in L} ((lF_i) \triangle F_i),$$

on en déduit

$$\alpha(F_i, K) = \frac{|\partial_K(F_i)|}{|F_i|} \leq |L| \sum_{l \in L} \frac{|(lF_i) \triangle F_i|}{|F_i|}.$$

Comme (F_i) est une suite de Følner de G, le membre de droite de la dernière inégalité tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini. On a donc $\lim_{i\to\infty} \alpha(F_i, K) = 0$, ce qui démontre (b).

Montrons l'implication (b) $\Rightarrow$ (a). Supposons que la suite (F_i) vérifie la propriété (b). Soient $g \in G$ et $i \in \mathbb{N}$. Posons $K = \{1_G, g, g^{-1}\}$. D'après le lemme 2.2.(i), on a

$$(gF_i) \triangle F_i \subset \partial_K(F_i).$$

Il en résulte

$$\frac{|(gF_i) \triangle F_i|}{|F_i|} \leq \frac{|\partial_K(F_i)|}{|F_i|} = \alpha(F_i, K).$$

Comme $\lim_{i\to\infty} \alpha(F_i, K) = 0$, on en déduit

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|(gF_i) \triangle F_i|}{|F_i|} = 0$$

ce qui montre que (F_i) est une suite de Følner de G. $\square$

3. Le lemme de remplissage

DÉFINITION 3.1. Soient X un ensemble et $\varepsilon > 0$. On dit qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties finies de X est *ε-disjointe* s'il existe une famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties disjointes de X telle que $B_i \subset A_i$ et

$$|B_i| \geq (1-\varepsilon)|A_i|$$

pour tout $i \in I$.

LEMME 3.1. *Soient X un ensemble et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une famille ε-disjointe de parties finies de X. Alors on a*

$$(1-\varepsilon) \sum_{i=1}^{n} |A_i| \leq \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|.$$

DÉMONSTRATION. Comme la famille $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est ε-disjointe, il existe une famille $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ de parties disjointes de X vérifiant $B_i \subset A_i$ et $|B_i| \geq (1-\varepsilon)\ |A_i|$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On a donc

$$(1-\varepsilon) \sum_{i=1}^{n} |A_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\ |B_i| = \left| \bigcup_{i=1}^{n} B_i \right| \leq \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|. \qquad \square$$

LEMME 3.2. *Soient K une partie finie d'un groupe G et $0 < \varepsilon < 1$. Soit $(A_i)_{1 \le i \le n}$ une famille ε-disjointe de parties finies non vides de G vérifiant $\alpha(A_i, K) \le \eta$ pour tout $1 \le i \le n$. Alors on a*

$$\alpha\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i, K\Big) \le \frac{\eta}{1-\varepsilon}.$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2.1.(ii), on a

$$\partial_K\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \partial_K(A_i).$$

Il en résulte

$$\Big|\partial_K\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big)\Big| \le \sum_{i=1}^{n} |\partial_K(A_i)| = \sum_{i=1}^{n} \alpha(A_i, K)|A_i| \le \eta \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Comme la famille $(A_i)_{1 \le i \le n}$ est ε-disjointe, on a d'après le lemme 3.1

$$(1-\varepsilon) \sum_{i=1}^{n} |A_i| \le \Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big|.$$

On en déduit

$$\alpha\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i, K\Big) = \frac{\Big|\partial_K \bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big|}{\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big|} \le \frac{\eta}{1-\varepsilon}. \qquad \square$$

LEMME 3.3. *Soient K, A et Ω des parties finies d'un groupe G telles que $A \neq \varnothing$ et $A \subset \Omega$. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|\Omega \setminus A| \ge \varepsilon|\Omega|$. Alors on a*

$$\alpha(\Omega \setminus A, K) \le \frac{\alpha(\Omega, K) + \alpha(A, K)}{\varepsilon}.$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2.1.(iii), on a

$$\partial_K(\Omega \setminus A) \subset \partial_K(\Omega) \cup \partial_K(A).$$

Donc

$$|\partial_K(\Omega \setminus A)| \le |\partial_K(\Omega)| + |\partial_K(A)| = \alpha(\Omega, K)|\Omega| + \alpha(A, K)|A|.$$

Puisque $|\Omega \setminus A| \ge \varepsilon|\Omega| \ge \varepsilon|A|$, on en déduit

$$\alpha(\Omega \setminus A, K) = \frac{|\partial_K(\Omega \setminus A)|}{|\Omega \setminus A|} \le \frac{\alpha(\Omega, K) + \alpha(A, K)}{\varepsilon}. \qquad \square$$

LEMME 3.4. *Soient A et B des parties finies d'un groupe G. On a*

$$\sum_{g \in G} |Ag \cap B| = |A||B|.$$

DÉMONSTRATION. Pour $E \subset G$, notons $\chi_E : G \to \{0, 1\}$ la fonction caractéristique de E. On a

$$\sum_{g\in G} |Ag \cap B| = \sum_{g\in G} \sum_{g'\in G} \chi_{Ag\cap B}(g') = \sum_{g\in G} \sum_{g'\in G} \chi_A(g'g^{-1})\chi_B(g').$$

En échangeant l'ordre de sommation puis par un changement de variable, on obtient

$$\sum_{g\in G} |Ag \cap B| = \sum_{g'\in G} \chi_B(g') \sum_{g\in G} \chi_A(g'g^{-1}) = |B|\,|A|. \qquad \square$$

DÉFINITION 3.2 ((ε,K)-REMPLISSAGE). Soient K et Ω des parties d'un groupe G et $\varepsilon > 0$. Une partie $R \subset G$ est appelée un (ε, K)-*remplissage de* Ω si les conditions suivantes sont vérifiées :

(C1) $R \subset Int_K(\Omega)$;

(C2) la famille $(Kg)_{g\in R}$ est ε-disjointe.

Remarquons qu'un (ε, K)-remplissage peut être vide.

La démonstration du théorème 1.1 repose sur le lemme suivant :

LEMME 3.5 (LEMME DE REMPLISSAGE). *Soient* Ω *et* K *des parties finies non vides d'un groupe* G. *Soit* $0 < \varepsilon \leq 1$. *Alors il existe une partie finie* $R \subset G$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(a) *R est un (ε, K)-remplissage de Ω ;*

(b) $\left|\bigcup_{g\in R} Kg\right| \geq \varepsilon(1-\alpha_0)|\Omega|$, *où* $\alpha_0 = \alpha(\Omega, K)$ *désigne la constante de moyennabilité relative de* Ω *par rapport à* K.

DÉMONSTRATION. Puisque $K \neq \varnothing$, on peut supposer $1_G \in K$, quitte à remplacer K par Kk_0^{-1} où $k_0 \in K$ et en remarquant que $\alpha(\Omega, K) = \alpha(\Omega, Kk_0^{-1})$ d'après les égalités (2–1).

Comme $1_G \in K$, on a $\mathrm{Int}_K(\Omega) \subset \Omega$ et $\mathrm{Ext}_K(\Omega) \subset G \setminus \Omega$. On en déduit

$$\Omega \setminus \partial_K(\Omega) = \mathrm{Int}_K(\Omega) \tag{3–1}$$

et donc

$$(1-\alpha_0)|\Omega| \leq |\Omega \setminus \partial_K(\Omega)| = |\,\mathrm{Int}_K(\Omega)|. \tag{3–2}$$

Puisque $\mathrm{Int}_K(\Omega) \subset \Omega$, tout ($\varepsilon$, K)-remplissage de Ω est contenu dans Ω et a donc un cardinal majoré par $|\Omega|$. Choisissons $R \subset G$ un (ε, K)-remplissage de Ω de cardinal maximal et posons $A = \bigcup_{g\in R} Kg$. Dans la suite, nous allons démontrer que $|A| \geq \varepsilon(1-\alpha_0)|\Omega|$, ce qui montrera (b). D'après le lemme 3.4, on a

$$\sum_{g\in \mathrm{Int}_K(\Omega)} |Kg \cap A| \leq |K|\,|A|. \tag{3–3}$$

Montrons que

$$\varepsilon|K| \leq |Kg \cap A| \quad \text{quel que soit } g \in \mathrm{Int}_K(\Omega). \tag{3–4}$$

Si $g \in R$, alors on a $Kg \cap A = Kg$ et l'inégalité (3–4) est trivialement vérifiée puisque $\varepsilon \leq 1$. Supposons maintenant que $g \in \mathrm{Int}_K(\Omega) \setminus R$ et que $|Kg \cap A| < \varepsilon|K|$. Mais alors

$$|Kg \setminus A| > (1-\varepsilon)|Kg|,$$

ce qui implique que $R \cup \{g\}$ est un (ε, K)-remplissage de Ω et contredit la maximalité du cardinal de R. L'inégalité (3–4) est donc satisfaite. On en déduit

$$\varepsilon|K|\,|\mathrm{Int}_K(\Omega)| \leq \sum_{g \in \mathrm{Int}_K(\Omega)} |Kg \cap A|. \tag{3–5}$$

Les inégalités (3–2), (3–3) et (3–5) impliquent alors

$$|A| \geq \varepsilon(1-\alpha_0)|\Omega|. \qquad \square$$

4. Démonstration du théorème

Avant de démontrer le théorème 1.1, faisons les remarques suivantes :

(i) En choisissant $A = B$ dans l'hypothèse (a) du théorème 1.1, on obtient $h(A) \geq 0$ pour toute partie $A \in \mathscr{F}(G)$.

(ii) Si on montre la convergence de la suite $(h(F_i)/|F_i|)$ pour toute suite de Følner (F_i), alors on aura prouvé le théorème. En effet, si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Følner, il en est de même pour la suite

$$(F_i)_{i\in\mathbb{N}} = (A_0, B_0, A_1, B_1, \ldots).$$

L'existence de $\lim_{i\to\infty} h(F_i)/|F_i|$ implique alors que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{h(A_i)}{|A_i|} = \lim_{i\to\infty} \frac{h(B_i)}{|B_i|}.$$

Démonstration du théorème 1.1. Soient $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de Følner de G et $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$. Posons

$$\lambda = \liminf_{i\to\infty} \frac{h(F_i)}{|F_i|}$$

et remarquons que $\lambda < \infty$ puisque les propriétés de h impliquent $h(A) \leq h(1_G)|A|$ pour tout $A \in \mathscr{F}(G)$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une suite finie $K_1, K_2, \ldots, K_n$ extraite de la suite (F_i) vérifiant les conditions suivantes :

(C1) $h(K_j)/|K_j| \leq \lambda + \varepsilon$ quel que soit $1 \leq j \leq n$,

(C2) $\alpha(K_j, K_i) \leq \varepsilon^{2n}$ quels que soient $1 \leq i < j \leq n$.

En effet, d'après la définition de λ, il existe une sous-suite $(F_{\varphi(i)})$ de (F_i) vérifiant
$$\frac{h(F_{\varphi(i)})}{|F_{\varphi(i)}|} \leq \lambda + \varepsilon,$$
pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme la suite $(F_{\varphi(i)})$ est aussi une suite de Følner de G, la proposition 2.3 permet alors de construire une sous-suite finie $K_1, K_2, \ldots, K_n$ de $(F_{\varphi(i)})$ vérifiant la condition (C2).

Soit D une partie finie non vide de G telle que
$$\alpha(D, K_j) \leq \varepsilon^{2n} \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq n. \tag{4–1}$$
Nous allons démontrer que pour n assez grand, il existe une famille ε-disjointe dans D formée d'un certain nombre des $K_j g$ (où $1 \leq j \leq n$ et $g \in G$) qui remplissent partiellement D, c'est-à-dire telle que la proportion de D recouverte par ces parties soit supérieure ou égale à $1-\varepsilon$. On utilisera ensuite ce recouvrement partiel et les propriétés de la fonction h pour montrer que
$$\limsup_{i\to\infty} h(F_i)/|F_i| \leq \lambda,$$
ce qui prouvera le théorème.

Définissons par récurrence finie un procédé de recouvrement partiel de D en au plus n étapes :

Étape 1. Rappelons que l'on $\alpha(D, K_j) \leq \varepsilon^{2n}$ pour tout $1 \leq j \leq n$. D'après le lemme 3.5 appliqué à $\Omega = D$ et à $K = K_n$, il existe $R_n \subset G$ un (ε, K_n)-remplissage fini de D tel que
$$\frac{|\bigcup_{g\in R_n} K_n g|}{|D|} \geq \varepsilon\big(1-\alpha(D, K_n)\big) \geq \varepsilon(1-\varepsilon^{2n}).$$
Posons $D_1 = D \setminus \bigcup_{g\in R_n} K_n g$. D'après l'inégalité précédente, on a
$$|D_1| \leq |D|\big(1-\varepsilon(1-\varepsilon^{2n})\big). \tag{4–2}$$

On continue le procédé de recouvrement par une récurrence finie de la manière suivante. Posons $D_0 = D$. Supposons que le processus de recouvrement partiel se poursuive jusqu'à l'étape k, où $1 \leq k \leq n-1$.

Les hypothèses de récurrence au rang k sont :

(H1) $\alpha(D_{k-1}, K_j) \leq (2(k-1)+1)\varepsilon^{2n-k+1}$ pour tout $1 \leq j \leq n-k+1$;

(H2) $R_{n-k+1} \subset G$ est un (ε, K_{n-k+1})-remplissage fini de D_{k-1} ;

(H3) en posant
$$D_k = D_{k-1} \setminus \bigcup_{g\in R_{n-k+1}} K_{n-k+1} g,$$

on a
$$|D_k| \le |D| \prod_{i=0}^{k-1} \Big(1-\varepsilon\big(1-(2i+1)\varepsilon^{2n-i}\big)\Big).$$
Remarquons que ces hypothèses sont vérifiées pour $k=1$. Construisons l'étape $k+1$:

Étape $k+1$. Si $|D_k| \le \varepsilon |D_{k-1}|$ alors $|D_k| \le \varepsilon |D|$ et on arrête le processus de recouvrement. Supposons maintenant que $|D_k| > \varepsilon |D_{k-1}|$. Soit $1 \le j \le n-k$. Le lemme 3.3 implique
$$\alpha(D_k, K_j) \le \frac{\alpha(\bigcup_{g\in R_{n-k+1}} K_{n-k+1}g, K_j)}{\varepsilon} + \frac{\alpha(D_{k-1}, K_j)}{\varepsilon}. \tag{4–3}$$
D'après les égalités (2–1) et la condition (C2), on a
$$\alpha(K_{n-k+1}g, K_j) = \alpha(K_{n-k+1}, K_j) \le \varepsilon^{2n}.$$
Puisque la famille $(K_{n-k+1}g)_{g\in R_{n-k+1}}$ est ε-disjointe, il résulte du lemme 3.2 que l'on a
$$\alpha\Bigg(\bigcup_{g\in R_{n-k+1}} K_{n-k+1}g, K_j\Bigg) \le \frac{\varepsilon^{2n}}{1-\varepsilon}.$$
On en déduit en utilisant l'inégalité (4–3) et l'hypothèse de récurrence (H1)
$$\alpha(D_k, K_j) \le \frac{\varepsilon^{2n}}{(1-\varepsilon)\,\varepsilon} + \frac{\big(2(k-1)+1\big)\varepsilon^{2n-k+1}}{\varepsilon} \le (2k+1)\varepsilon^{2n-k}$$
pour $1 \le j \le n-k$. Cette dernière inégalité est (H1) au rang $k+1$. En appliquant le lemme 3.5 à $\Omega = D_k$ et à $K = K_{n-k}$, il existe $R_{n-k} \subset G$ un (ε, K_{n-k})-remplissage fini de D_k tel que
$$\frac{|\bigcup_{g\in R_{n-k}} K_{n-k}g|}{|D_k|} \ge \varepsilon\,\big(1-\alpha(D_k, K_{n-k})\big) \ge \varepsilon\,\big(1-(2k+1)\varepsilon^{2n-k}\big).$$
En particulier (H2) est vérifiée au rang $k+1$. Posons
$$D_{k+1} = D_k \setminus \bigcup_{g\in R_{n-k}} K_{n-k}g.$$
Alors on a
$$|D_{k+1}| \le |D_k|\big(1-\varepsilon\big(1-(2k+1)\varepsilon^{2n-k}\big)\big).$$
En utilisant l'hypothèse de récurrence (H3) et l'inégalité précédente, on obtient
$$|D_{k+1}| \le |D| \prod_{i=0}^{k} \Big(1-\varepsilon\big(1-(2i+1)\varepsilon^{2n-i}\big)\Big).$$

Ceci montre l'inégalité (H3) au rang $k+1$ et achève la construction de l'étape $k+1$.

Supposons que le processus de recouvrement partiel se poursuive jusqu'à l'étape n et que $|D_{n-1}| > \varepsilon |D_{n-2}|$. D'après (H3) au rang n, on a

$$|D_n| \le |D| \prod_{i=0}^{n-1} \Big(1 - \varepsilon\big(1-(2i+1)\varepsilon^{2n-i}\big)\Big). \tag{4–4}$$

On va montrer que pour n assez grand (ne dépendant que de ε) on a $|D_n| \le \varepsilon |D|$. De l'inégalité (4–4), on en déduit la majoration suivante :

$$|D_n| \le |D|\big(1-\varepsilon(1-(2n-1)\varepsilon^{n+1})\big)^n. \tag{4–5}$$

Comme $\lim_{i\to\infty}(2i-1)\varepsilon^{i+1} = 0$ et $\lim_{i\to\infty}(1-\frac{\varepsilon}{2})^i = 0$, il existe un entier n_0 tel que pour $i \ge n_0$, on a $(2i-1)\varepsilon^{i+1} \le \frac{1}{2}$ et $(1-\frac{\varepsilon}{2})^i \le \varepsilon$. Si $n \ge n_0$, il résulte de l'inégalité (4–5)

$$|D_n| \le |D|(1-\frac{\varepsilon}{2})^n \le \varepsilon |D|.$$

Supposons à partir de maintenant que l'entier n fixé au début de la démonstration est plus grand que n_0. On vient donc de démontrer que pour toute partie finie D telle que $\alpha(D, K_j) \le \varepsilon^{2n}$ pour tout $1 \le j \le n$, il existe un entier k_0 (où $1 \le k_0 \le n$) tel que $|D_{k_0}| \le \varepsilon |D|$. Plus précisément, la proportion de D recouverte par les parties des familles ε-disjointes

$$(K_n g)_{g\in R_n}, (K_{n-1} g)_{g\in R_{n-1}}, \ldots, (K_{n-k_0+1} g)_{g\in R_{n-k_0+1}},$$

est supérieure ou égale à $1-\varepsilon$.

Passons à la majoration de $h(D)/|D|$. Pour simplifier posons $J = \{n-k_0+1, \ldots, n\}$ et notons $K_j R_j = \bigcup_{g\in R_j} K_j g$ pour tout $j \in J$. Dans la suite on utilisera sans le préciser la sous-additivité et l'invariance à droite de h. Puisque l'on a

$$D = \bigcup_{j\in J} K_j R_j \cup D_{k_0}$$

et

$$|D_{k_0}| \le \varepsilon |D|,$$

on en déduit

$$\frac{h(D)}{|D|} \le \frac{h(\bigcup_{j\in J} K_j R_j)}{|D|} + \frac{h(D_{k_0})}{|D|} \le \frac{h(\bigcup_{j\in J} K_j R_j)}{|D|} + \varepsilon h(1_G). \tag{4–6}$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{h(\bigcup_{j\in J} K_j R_j)}{|D|} \le \sum_{j\in J} \sum_{g\in R_j} \frac{h(K_j g)}{|D|} = \sum_{j\in J} \sum_{g\in R_j} \frac{h(K_j)}{|K_j|} \frac{|K_j g|}{|D|}.$$

En utilisant la condition (C1), on en déduit

$$\frac{h(\bigcup_{j\in J} K_j R_j)}{|D|} \leq (\lambda+\varepsilon) \sum_{j\in J} \sum_{g\in R_j} \frac{|K_j g|}{|D|}. \tag{4–7}$$

Remarquons que la famille formée des $K_j g$, où $j \in J$ et $g \in R_j$, est ε-disjointe dans D. Il résulte du lemme 3.1

$$\sum_{j\in J} \sum_{g\in R_j} |K_j g| \leq \frac{|D|}{1-\varepsilon}. \tag{4–8}$$

Les inégalités (4–7) et (4–8) impliquent alors

$$\frac{h(\bigcup_{j\in J} K_j R_j)}{|D|} \leq \frac{\lambda+\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{4–9}$$

On a donc d'après les inégalités (4–6) et (4–9)

$$\frac{h(D)}{|D|} \leq \frac{\lambda+\varepsilon}{1-\varepsilon} + \varepsilon h(1_G). \tag{4–10}$$

Comme (F_i) est une suite de Følner, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(i \geq N) \Rightarrow \alpha(F_i, K_j) \leq \varepsilon^{2n} \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq n.$$

En appliquant l'inégalité (4–10) à $D = F_i$ pour $i \geq N$, on en déduit

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{h(F_i)}{|F_i|} \leq \frac{\lambda+\varepsilon}{1-\varepsilon} + \varepsilon h(1_G).$$

Puisque cette dernière inégalité est vraie pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$, on obtient en faisant tendre ε vers 0

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{h(F_i)}{|F_i|} \leq \lambda = \liminf_{i\to\infty} \frac{h(F_i)}{|F_i|},$$

ce qui démontre le théorème. □

References

[CoK] M. Coornaert and F. Krieger. *Mean topological dimension for actions of discrete amenable groups*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, **13** :3 (2005), 779–793.

[Føl] E. Følner. *On groups with full Banach mean value*. Math. Scand. **3** (1955), 245–254.

[Gre] F. P. Greenleaf. *Invariant means on topological groups and their applications*. Van Nostrand, New York, 1969.

[Gro] M. Gromov. *Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps, I*. Math. Phys. Anal. Geom. **2** (1999), 323–415.

[LiW] E. Lindenstrauss and B. Weiss. *Mean topological dimension*. Israel J. Math. **115** (2000), 1–24.

[Mou] J. Moulin Ollagnier. *Ergodic theory and statistical mechanics*. Lecture Notes in Mathematics, **1115**. Springer, Berlin, 1985.

[OrW] D. S. Ornstein and B. Weiss. *Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups*. J. Analyse Math. **48** (1987), 1–141.

FABRICE KRIEGER
INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR ET CNRS
7 RUE RENÉ DESCARTES
67084 STRASBOURG CEDEX
FRANCE

Current address:
UNIVERSITÉ DE GENÈVE
SECTION DE MATHÉMATIQUES
2-4, RUE DU LIÈVRE
CASE POSTALE 64
CH-1211 GENÈVE 4
SUISSE
Fabrice.Krieger@math.unige.ch
http://www.unige.ch/math/folks/krieger/