UNIVERSITÉ DE LIMOGES

PUBLICATIONS

DU

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

COMPTES-RENDUS

DES

JOURNÉES DE THÉORIE ANALYTIQUE ET ÉLÉMENTAIRE DES NOMBRES

LIMOGES, 10-11 MARS 1980

FASCICULE 2

MARS 1981

U.E.R. des Sciences

123, Avenue Albert Thomas

87060 LIMOGES CEDEX

SUR CERTAINES SOMMES DE SERIES LIEES AUX PERIODES DE FORMES MODULAIRES

par Henri COHEN (Grenoble)

I INTRODUCTION

Je renvoie à [2], [3] et [4] pour la plupart des définitions sur les formes modulaires.

Soit G un sous-groupe de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$, et soit $S_k(G)$ l'espace des formes modulaires paraboliques de poids k sur G. Sauf pour des groupes G particuliers, il n'est pas toujours facile d'exhiber une base de $S_k(G)$. A ma connaissance il y a essentiellement 3 méthodes :

- La méthode des séries théta. Avec un peu de chance on arrive à obtenir ainsi un système générateur de $S_k(G)$ (voir [1] et [5]).

- La formule de trace de SELBERG-EICHLER. Elle permet d'obtenir une forme parabolique somme des fonctions propres normalisées des opérateurs de HECKE, et l'application des opérateurs de HECKE et des opérateurs $z \to dz$ permettent d'obtenir un système générateur.

- Les séries de POINCARE. L'inconvénient de cette dernière méthode est que les coefficients de Fourier font intervenir des fonctions de BESSEL J_{k-1} qui ne sont pas aisément accessibles sur un calculateur et qui ne possèdent pas à priori de propriétés arithmétiques.

Le but de mon exposé est de faire de la propagande pour d'autres formes paraboliques qui non seulement permettent de trouver une base (ce n'est pas vraiment leur intérêt principal car la méthode utilisant la formule de trace de SELBERG-EICHLER est certainement la meilleure), mais possèdent également d'autres propriétés intéressantes.

II LES FONCTIONS $G_{k,j}(\tau)$

Pour simplifier nous nous placerons dans le cas $G = SL_2(\mathbb{Z})$ mais tout ce qui suit se généralise sans difficulté au cas d'un sous-groupe de congruence.

On pose pour $2 \leq j \leq k-2$

$$G_{k,j}(\tau) = \frac{(j-1)!\,(k-1-j)!}{(k-1)!} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})} (c\tau+d)^{-(k-j)}(a\tau+b)^{-j}$$

PROPOSITION 2. 1 -

La série définissant $G_{k,j}$ converge normalement sur tout compact du demi plan de POINCARE et définit une forme modulaire parabolique de poids k.

La démonstration de l'assertion de convergence est très facile pour $3 \leq j \leq k-3$ et un peu plus délicate pour $j = 2$ et $k-2$ mais quand même sans difficulté. Le fait que $G_{k,j}$ soit une forme parabolique se vérifie alors trivialement. On peut remarquer que :

$$(c\tau+d)^{-(k-j)}(a\tau+b)^{-j} = (c\tau+d)^{-k}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)^{-j}$$

Le fait le plus important à propos de ces fonctions est que ce sont des noyaux pour les périodes. Plus précisément : Si f est une forme parabolique de poids k et si $1 \leq j \leq k-1$ on pose

$$r_j(f) = \int_0^{i\infty} \tau^{j-1} f(\tau)\, d\tau$$

C'est la $j^{\text{ème}}$ période de f. On a alors :

PROPOSITION 2. 2 -

Pour $2 \leq j \leq k-2$

$$r_j(f) = c_k^{-1} < f, G_{k,j} >$$

où $c_k = \dfrac{(-1)^{k/2}\pi}{2^{k-2}(k-1)}$ *et < , > est le produit scalaire de PETERSSON.*

Pour $j = 1$ et $k-1$ la série définissant $G_{k,j}$ ne converge plus absolument et il faut introduire des facteurs de convergence à la Hecke pour avoir un analogue de la proposition 2.2. Nous ne le ferons pas ici.

De cette proposition et du théorème d'isomorphisme d'EISCHLER-SHIMURA [2], [4] on peut déduire beaucoup de propriétés des $G_{k,j}$. Par exemple :

PROPOSITION 2.3 -

1) $$G_{k,k-j} + (-1)^{k-1-j} G_{k,j} = 0$$

2) $$\sum_{\substack{1\leq \ell \leq j-1 \\ \ell \text{ pair}}} \binom{j-1}{\ell-1} G_{k,\ell} + \sum_{\substack{j\leq \ell \leq k-1 \\ \ell \text{ pair}}} \binom{k-j-1}{\ell-j} G_{k,\ell} = 0$$

3) $$\sum_{\substack{1\leq \ell \leq j-1 \\ \ell \text{ impair}}} \binom{j-1}{\ell-1} G_{k,\ell} + \sum_{\substack{j\leq \ell \leq k-1 \\ \ell \text{ impair}}} \binom{k-j-1}{\ell-j} G_{k,\ell} = 0$$

où $G_{k,1}$ (resp. $G_{k,k-1}$) est l'unique forme modulaire parabolique satisfaisant la proposition 2.2 pour $j = 1$ (resp. $k-1$)

THEOREME 2.4 -

Les $G_{k,j}$ avec $2 \leq j \leq k-2$ et j pair forment un système générateur de $S_k(G)$ dont les seules relations sont 1) et 2). On a un énoncé analogue mais un peu plus compliqué pour j impair.

Je répète ici que la proposition 2.3 et le Théorème 2.4 se généralisent facilement à un sous-groupe de congruence. Ceci fera d'ailleurs en partie l'objet d'un papier ultérieur. Le théorème 2.4 montre donc que les $G_{k,j}$ j pair forment non seulement un système générateur, mais aussi qu'on peut facilement en extraire une base grâce aux relations 1) et 2).

III COEFFICIENTS DE FOURIER DES $G_{k,j}$

Le calcul des coefficients de Fourier de $G_{k,j}$ ne pose pas de problème particulier mais est assez long. De plus il y a plusieurs façons, qui ont toutes leur avantage, d'écrire le résultat. L'une des façons est la suivante :

Posons

$$G_{k,j} = \frac{(j-1)!\,(k-1-j)!}{(k-1)!} \sum_{n\geq 1} a(m)\, q^m \quad (q = e^{2i\pi\tau})$$

On a alors :

THEOREME 3.1 -

$$a(m) = -8\, i\, \pi \lim_{N\to\infty} [S_N(j) + (-1)^j S_N(k-j)]$$

où :

$$S_N(j) = \frac{1}{2} \frac{(-2\, i\, \pi\, m)^{j-1}}{(j-1)!} + \sum_{1\leq \ell\leq j} \binom{k-1-\ell}{k-1-j} \frac{(-2\, i\, \pi\, m)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \sum_{1\leq n\leq N} n^{j-\ell} \begin{cases} \alpha_j(m,n) & si\ \ell \equiv j(2) \\ i\beta_j(m,n) & si\ \ell \not\equiv j(2) \end{cases}$$

$$\text{avec}\quad \alpha_j(m,n) = \sum_{\substack{d|n,\, d\geq 1\\ (d,\frac{n}{d})=1}} d^{k-2j} \cos \frac{2\pi m}{n}(1 - d\, d^{-1})$$

$$\beta_j(m,n) = \sum_{\substack{d|n,\, d\geq 1\\ (d,\frac{n}{d})=1}} d^{k-2j} \sin \frac{2\pi m}{n}(1 - d\, d^{-1})$$

où d^{-1} est défini par la congruence $d\, d^{-1} \equiv 1 \pmod{\frac{n}{d}}$. d^{-1} est défini modulo $\frac{n}{d}$, donc $d\, d^{-1}$ modulo n, donc les définitions de α_j et β_j ont bien un sens.

Noter que $\alpha_j(m, n)$ et $\beta_j(m, n)$ sont des nombres algébriques. Dans le cas particulier où $k \equiv 0 \pmod 4$ et où $j = \frac{k}{2}$, la formule ci-dessus se simplifie notablement. On a alors :

COROLLAIRE 3.2 -

Si $k \equiv 0 \pmod 4$ et $j = \frac{k}{2}$ on a

$$a(m) = -8\, i\, \pi \left[\frac{(-2\, i\, \pi\, m)^{(k-2)/2}}{((k-2)/2)!} + i\, \frac{(2\, \pi\, m)^{(k-1)/2}\sqrt{\pi}}{((k-2)/2\,!} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}\, J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\pi\, m}{n}\right) \gamma(m, n)\right]$$

où $\gamma(m, n) = \sum_{\substack{d|n, d\geq 1 \\ (d,\frac{n}{d})=1}} \cos \frac{\pi\, m}{n}(2\, d\, d^{-1} - 1)$

avec comme précédemment $d\, d^{-1} \equiv 1 \pmod{n/d}$

Noter que $J_{\frac{k-1}{2}}$ est une fonction élémentaire s'exprimant uniquement à l'aide de sinus et cosinus. Le terme général de la série est $O(n^{-k/2+\varepsilon})$.

Ce résultat peut être comparé au développement de Fourier des séries de POINCARE, $J_{\frac{k-1}{2}}(\frac{\pi\, m}{n})$ est alors remplacé par une fonction de BESSEL J_{k-1}, et $\gamma(m, n)$ par une somme de KLOOSTERMANN. Il est tentant de se demander si l'on ne pourrait pas obtenir une estimation de la croissance de $a(m)$, et pourquoi pas la conjecture de RAMANUJAN-PETERSSON (maintenant théorème de DELIGNE) en montrant que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}\, J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\pi\, m}{n}\right) \gamma(m, n) = O(m^{\varepsilon}) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

REMARQUE 3.3 -

Si on écrit $\frac{m}{n} = \sum_{P_\ell^{\alpha_\ell}\| n} \frac{A_\ell}{P_\ell^{\alpha_\ell}}$ il n'est pas difficile de montrer que l'on a l'expression

$$\gamma(m, n) = \prod_{P_\ell^{\alpha_\ell}\| n} \left(2 \cos \frac{\pi\, A_\ell}{P_\ell^{\alpha_\ell}}\right)$$

Exemple 3.4 -

En prenant $k = 4$ dans le corollaire 3.2 on obtient une expression égale au m^e coefficient de Fourier d'une forme parabolique de poids 4 dur $S\,L_2(\mathbb{Z})$ donc identiquement nulle. On en déduit l'identité :

$$\sum_{n\geq 1} \left(\cos\frac{\pi m}{n} - \frac{\sin\frac{\pi m}{n}}{\frac{\pi m}{n}}\right) \gamma(m, n) = -\frac{1}{2}$$

Dans le cas d'un sous-groupe de congruence général, il existera des formes paraboliques de poids 4 donc l'expression pour $a(m)$, voisine de celle donnée ci-dessus ne sera pas obligatoirement identiquement nulle. Il serait donc peut-être intéressant d'essayer de démontrer directement sur la définition de $\gamma(m, n)$ que

$$m \sum_{n\geq 1} \left(\cos\frac{\pi m}{n} - \frac{\sin\frac{\pi m}{n}}{\frac{\pi m}{n}}\right) \gamma(m, n) = O(m^{3/2 + \varepsilon}) \qquad \forall\, \varepsilon > 0$$

bien que l'on sache qu'en fait le membre de gauche vaut exactement $-\frac{m}{2}$. La majoration triviale, obtenue en coupant la sommation à $n = m$ ne donne que la majoration bien connue $O(m^{k/2 + \varepsilon})$ donc dans le cas qui nous occupe ici $O(m^{2+\varepsilon})$. Il faudrait pouvoir bien prendre en compte les oscillations dues aux cosinus, sinus et $\gamma(m, n)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] EICHLER M. - *The basis problem for modular forms and the traces of Hecke operators* .-Lecture notes n° 320, Springer-Verlag.

[2] LANG S.- *Introduction to modular forms*.- Springer-Verlag (1976).

[3] SERRE J.P.- *Cours d'arithmétique*.- P.U.F. (1970).

[4] SHIMURA G.- *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*.- Iwanami Shoten and Princeton University Press (1971)

[5] WALDSPURGER J.L.- *Engendrement par des séries theta de certains espaces de formes modulaires*.- Inv. Math. 50, p. 135-168 (1979).

Henri COHEN
Mathématiques - Université de BORDEAUX I
351, Cours de la Libération
33405 TALENCE CEDEX